www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

École des Hautes Études Commerciales

Mathématiques III

4 heures

OPTION ÉCONOMIQUE

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

exercice 1 après l'exercice 2

EXERCICE 2

1. *a*) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système :

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4 = 8 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 7 \end{cases}$$

On exprimera les solutions en fonction de y_4.

Déterminer l'ensemble A des solutions vérifiant :

$$y_1 \geq 0\,;\ y_2 \geq 0\,;\ y_3 \geq 0\,;\ y_4 \geq 0.$$

b) Écrire le vecteur colonne :

$$T = \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire des trois vecteurs colonnes : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Soit B l'ensemble des éléments (y_1, y_2, y_3, y_4) de $\mathbf{R}^4$ qui vérifient :

(1)
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4 \geq 8 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ y_1 \geq 0\,;\ y_2 \geq 0\,;\ y_3 \geq 0\,;\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

On pose :

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 13\,y_1 + 40\,y_2 + 17\,y_3 + 5\,y_4.$$

Déterminer le minimum de $F(y_1, y_2, y_3, y_4)$ lorsque (y_1, y_2, y_3, y_4) décrit B.

2. Une usine peut fabriquer respectivement x_1, x_2 et x_3 unités par jour de trois produits P_1, P_2 et P_3. Les conditions d'utilisation des machines imposent les contraintes suivantes :

(2)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 13 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 40 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17 \\ x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 0\,;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les bénéfices étant comptés en milliers de francs, une unité de P_1 (resp. P_2 ; resp. P_3) procure un bénéfice de 8 (resp. 5 ; resp. 7). Ainsi, le bénéfice quotidien est :

$$G(x_1, x_2, x_3) = 8\,x_1 + 5\,x_2 + 7\,x_3.$$

a) Soient (x_1, x_2, x_3) une solution de (2) et (y_1, y_2, y_3, y_4) une solution de (1). Montrer que :

$$G(x_1, x_2, x_3) \leq F(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

b) Calculer $G(2, 5, 1)$. En déduire un triplet rendant le bénéfice maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice.

EXERCICE 1 Soit f la fonction numérique définie sur R par les relations : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} \quad \text{si} \quad t \neq 0. \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est continue sur R.

2. *a*) Montrer que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.
b) Calculer $f'(t)$ pour $t \neq 0$.
c) Étudier la variation de la fonction g définie sur R par la relation : $g(t) = (1-t)e^t - 1$.

En déduire le signe de $f'(t)$ pour $t \neq 0$.

3. Étudier la variation de f sur R et construire la courbe représentative de cette fonction.

4. Pour tout nombre réel strictement positif x et pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \, dt.$$

Montrer que la suite $(I_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante.

5. *a*) Montrer que, pour tout nombre réel $t \geq 0$: $0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{1 + \frac{t}{2}}$.

b) Déterminer un nombre réel strictement positif k tel que, pour tout nombre réel $x \neq 0$ et pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$:

$$0 \leq I_n(x) \leq \frac{k}{n-1}.$$

6. Calculer la limite de $I_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

1. On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$,

où α et β sont des nombres réels tels que : $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M. (On vérifiera que 1 est valeur propre.)
b) Pour tout nombre entier naturel non nul n, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M^n.
c) Calculer M^n.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout nombre entier naturel n, X_n est une variable de Bernoulli de paramètre p_n, où $0 < p_n < 1$, et que les probabilités conditionnelles :

$$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0)$$

ne dépendent pas de n et sont strictement comprises entre 0 et 1. On note respectivement a et b ces probabilités conditionnelles.
On considère les matrices :

$$D_n = \begin{pmatrix} p_n \\ 1-p_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer D_n en fonction de D_0 et de T, puis p_n en fonction de p_0, a et b.
b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, p_n tend vers une limite que l'on calculera. Vérifier que cette limite ne dépend pas de p_0.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail